

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2024,
Convocatoria extraordinaria

[mentoor.es](https://www.mentoor.es)



Problema 1. Álgebra

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

- ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible?
- Para $k=0$ si existe, calcular la matriz inversa de A .
- Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD=DA$.

Solución:

- ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible?

Una matriz A es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos el determinante de A :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 0 - k(k(-1) - 1(2)) + 3(k(-1) - \frac{1}{3}(2)) \\ &= -k(-k - 2) + 3(-k - \frac{2}{3}) \\ &= k^2 + 2k - 3k - 2 \\ &= k^2 - k - 2 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores de k que hacen que la matriz no sea invertible.

$$k^2 - k - 2 = 0 \implies k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Los valores críticos son $k = 2$ y $k = -1$.

Por lo tanto, la matriz A es invertible para cualquier valor de k excepto 2 y -1.

La matriz A es invertible para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

- Para $k=0$ si existe, calcular la matriz inversa de A .

Para $k = 0$, el determinante es $|A| = 0^2 - 0 - 2 = -2$. Como es distinto de cero, la matriz es invertible. La matriz para $k = 0$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa usando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$.

La matriz de adjuntos es:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1) - 1(-1) & -(0-2) & 0 - \frac{2}{3} \\ -(0 - (-3)) & 0 - 6 & -(0-0) \\ 0 - \frac{1}{3}(3) & -(0-0) & 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



La traspuesta de la adjunta es:

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD=DA$.

Sea D una matriz diagonal genérica $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Calculamos los productos AD y DA .

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & b/3 & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & b/3 & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

Igualemos $AD = DA$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & b/3 & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & b/3 & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

De esta igualdad matricial obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -3c &= 3a \implies c = a \\ -c &= b \\ -2a &= 2c \implies a = c \\ -b &= -c \implies b = c \end{aligned}$$

Todas las condiciones implican que $a = b = c$. Por tanto, la matriz D debe tener todos los elementos de su diagonal principal iguales.

$$\text{Las matrices } D \text{ son de la forma } D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$



Problema 2. Álgebra

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución.
- Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de a , β y γ dependiendo del parámetro real a .

Solución:

- Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución.

La ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución única si la matriz A^2 es invertible, es decir, si $|A^2| \neq 0$. Sabemos que $|A^2| = (|A|)^2$. Por lo tanto, la condición es equivalente a $|A| \neq 0$. Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 2(1(3) - 2(a)) = 2(3 - 2a)$$

Igualamos a cero para encontrar el valor crítico:

$$2(3 - 2a) = 0 \implies 3 - 2a = 0 \implies a = 3/2$$

La ecuación tendrá solución única siempre que $|A| \neq 0$, es decir, para $a \neq 3/2$.

La ecuación tiene solución única para $a \in \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$.

- Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de a , β y γ dependiendo del parámetro real a .

Si $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución, se debe cumplir $A^2X = B$. Primero calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 2+6 \\ 3+6+a & 4 & 6+2+3 \\ a+3a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el producto A^2X :

$$A^2X = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1+2a) + 0(-2) + 8(-1) \\ 3(9+a) + 4(-2) + 11(-1) \\ 3(4a) + 0(-2) + (2a+9)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6a-8 \\ 27+3a-8-11 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix}$$



Este resultado debe ser igual a $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - 5 \\ 3a + 8 \\ 10a - 9 \end{pmatrix}$$

No hay ninguna condición adicional para el parámetro a . Por lo tanto, los valores de α, β, γ dependen de a .

Los valores son: $\alpha = 6a - 5, \beta = 3a + 8, \gamma = 10a - 9$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Geometría

Se dan las rectas $r : x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$ y $s : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

- Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s.

Solución:

- Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

Obtenemos un punto y un vector director para cada recta.

Recta r: $P_r(1, 2, 1)$, $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$.

Recta s: $P_s(3, 3, -1)$, $\vec{v}_s = (-2, -1, 2)$.

Primero, estudiamos la posición relativa.

Los vectores directores \vec{v}_r y \vec{v}_s no son proporcionales ($\frac{1}{-2} \neq \frac{1}{-1}$), por lo que las rectas se cortan o se cruzan.

Para distinguirlo, estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores directores y el vector $\vec{P_r P_s} = (3 - 1, 3 - 2, -1 - 1) = (2, 1, -2)$.

$$\det(P_r \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 - (-2)) - 1(2 - (-4)) - 2(-1 - (-2)) = 2(4) - 1(6) - 2(1) = 8 - 6 - 2 = 0$$

Como el determinante es cero, los tres vectores son coplanarios, y por tanto, las rectas se cortan.

Para hallar el punto de intersección P, escribimos las rectas en forma paramétrica e igualamos sus

$$\text{coordenadas. } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

Igualando:

- $1 + \lambda = 3 - 2\mu \implies \lambda + 2\mu = 2$
- $2 + \lambda = 3 - \mu \implies \lambda + \mu = 1$
- $1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \implies 2\lambda - 2\mu = -2 \implies \lambda - \mu = -1$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3): $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = -1 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $2\lambda = 0 \implies \lambda = 0$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $0 + \mu = 1 \implies \mu = 1$.

Comprobamos si estos valores satisfacen la primera ecuación: $0 + 2(1) = 2$. Sí, se cumple.

El sistema es compatible determinado, por lo que las rectas se cortan.

Para hallar el punto P, sustituimos $\lambda = 0$ en la recta r (o $\mu = 1$ en s):

$$P = (1 + 0, 2 + 0, 1 + 2(0)) = (1, 2, 1).$$

Las rectas se cortan en el punto $P(1, 2, 1)$.

- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s.

La nueva recta, llamémosla t, pasa por $P(1, 2, 1)$. Su vector director \vec{v}_t debe ser perpendicular a \vec{v}_r y \vec{v}_s simultáneamente. Por tanto, podemos obtenerlo calculando el producto vectorial de ambos.



$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 - (-2)) - \vec{j}(2 - (-4)) + \vec{k}(-1 - (-2)) = (4, -6, 1)$$

La recta t queda definida por el punto $P(1, 2, 1)$ y el vector director $\vec{v}_t = (4, -6, 1)$.

Su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$$

<p>La ecuación de la recta es $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = z-1$.</p>
--

Problema 4. Geometría

Sea el plano $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.
- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente.
- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores \vec{AB} y \vec{AC} determinados por los puntos del apartado anterior.

Solución:

- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.

La distancia desde el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ al plano $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$ viene dada por la fórmula:

$$\text{dist}(O, \pi) = \frac{|6(0) + 4(0) - 3(0) - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-d|}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

Queremos que esta distancia sea igual a 1:

$$\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \implies |d| = \sqrt{61}$$

Por lo tanto, hay dos posibles valores para d .

$$\boxed{d = \sqrt{61} \text{ y } d = -\sqrt{61}.}$$

- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente.

Intersección con el eje X (punto A): Hacemos $y = 0, z = 0$.
 $6x - d = 0 \implies x = d/6$. El punto es $A(d/6, 0, 0)$.

Intersección con el eje Y (punto B): Hacemos $x = 0, z = 0$.
 $4y - d = 0 \implies y = d/4$. El punto es $B(0, d/4, 0)$.

Intersección con el eje Z (punto C): Hacemos $x = 0, y = 0$.
 $-3z - d = 0 \implies z = -d/3$. El punto es $C(0, 0, -d/3)$.

$$\boxed{A(d/6, 0, 0), \quad B(0, d/4, 0), \quad C(0, 0, -d/3).}$$

- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores \vec{AB} y \vec{AC} determinados por los puntos del apartado anterior.

Primero, calculamos los vectores \vec{AB} y \vec{AC} para $d \neq 0$:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= B - A = (0 - d/6, d/4 - 0, 0 - 0) = (-d/6, d/4, 0) \\ \vec{AC} &= C - A = (0 - d/6, 0 - 0, -d/3 - 0) = (-d/6, 0, -d/3) \end{aligned}$$

El ángulo θ entre los dos vectores se calcula con el producto escalar:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}$$

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \left(-\frac{d}{6}\right) \left(-\frac{d}{6}\right) + \left(\frac{d}{4}\right) (0) + (0) \left(-\frac{d}{3}\right) = \frac{d^2}{36}$$

Calculamos los módulos:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{d^2 \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{16}\right)} = |d| \sqrt{\frac{4+9}{144}} = \frac{|d|\sqrt{13}}{12}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{d}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}} = \sqrt{d^2 \left(\frac{1}{36} + \frac{4}{36}\right)} = |d| \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{|d|\sqrt{5}}{6}$$

Calculamos el coseno del ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{d^2/36}{\frac{|d|\sqrt{13}}{12} \cdot \frac{|d|\sqrt{5}}{6}} = \frac{d^2/36}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} = \frac{d^2}{36} \cdot \frac{72}{d^2\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}$$

El ángulo es $\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{65}}{65}\right)$.

$$\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{65}}{65}\right) \approx 75.65^\circ.$$

Problema 5. Análisis

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$.
- Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.
- Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Solución:

- El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$.

Para que haya un extremo relativo en $x = -3/4$, la primera derivada debe anularse en ese punto, $h'(-3/4) = 0$.

$$h'(x) = a + 2x. \quad h'(-3/4) = a + 2(-3/4) = a - 3/2 = 0 \implies a = 3/2.$$

Para confirmar que es un mínimo, usamos el criterio de la segunda derivada.

$$h''(x) = 2.$$

Como $h''(-3/4) = 2 > 0$, se confirma que en $x = -3/4$ hay un mínimo relativo.

$$\boxed{a = 3/2.}$$

- Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

Para $a = 3/2$, las funciones son:

$$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2 \text{ (una parábola).}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2} + 2x \text{ (una recta).}$$

Parábola $y = x^2 + \frac{3}{2}x$:

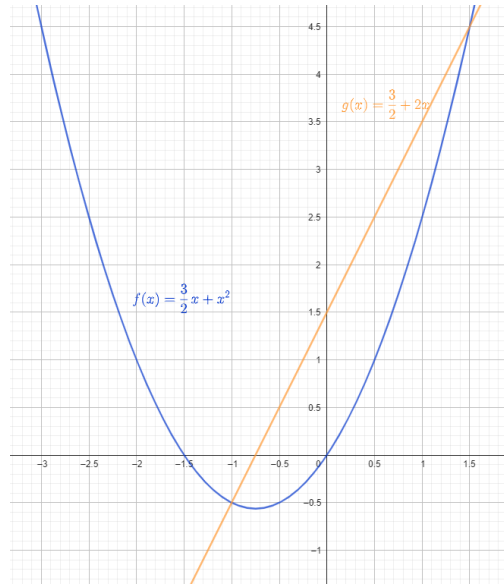
$$- \text{Vértice: } x_v = -b/2a = -(3/2)/2 = -3/4. \quad y_v = (-3/4)^2 + \frac{3}{2}(-3/4) = 9/16 - 9/8 = -9/16.$$

$$\text{Vértice } (-3/4, -9/16).$$

$$- \text{Puntos de corte con eje X (} y = 0 \text{): } x(x + 3/2) = 0 \implies x = 0, x = -3/2. \text{ Puntos } (0, 0) \text{ y } (-3/2, 0).$$

Recta $y = 2x + 3/2$:

$$- \text{Pasa por } (0, 3/2) \text{ y } (-3/4, 0).$$



c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Primero, encontramos los puntos de intersección de $h(x)$ y $h'(x)$.

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \implies x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Multiplicamos por 2: $2x^2 - x - 3 = 0$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-3)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Los puntos de corte son $x_1 = 6/4 = 3/2$ y $x_2 = -4/4 = -1$.

El área es la integral definida de la diferencia de las funciones entre estos límites.

En el intervalo $(-1, 3/2)$, la recta está por encima de la parábola.

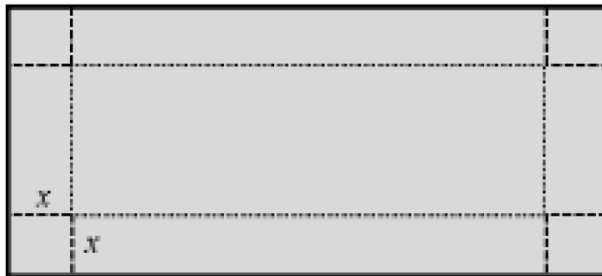
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^{3/2} (h'(x) - h(x)) dx = \int_{-1}^{3/2} \left((2x + \frac{3}{2}) - (x^2 + \frac{3}{2}x) \right) dx \\ \text{Área} &= \int_{-1}^{3/2} (-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} \\ &= \left(-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right) \\ &= \left(-\frac{27/8}{3} + \frac{9/4}{4} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{36}{16} \right) - \left(\frac{4 + 3 - 18}{12} \right) \\ &= \left(\frac{-18 + 9 + 36}{16} \right) - \left(\frac{-11}{12} \right) = \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{81 + 44}{48} = \frac{125}{48} \end{aligned}$$

El área es $\frac{125}{48}$ unidades cuadradas.

Problema 6. Análisis

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.
- Dicho volumen.



Solución:

- Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.

Sea x el lado del cuadrado recortado en cada esquina. Las dimensiones de la caja serán:

- Largo: $l = 16 - 2x$
- Ancho: $a = 10 - 2x$
- Alto: $h = x$

El dominio de x está restringido por el hecho de que las dimensiones deben ser positivas. La restricción más fuerte es $10 - 2x > 0 \implies 2x < 10 \implies x < 5$. Por tanto, $x \in (0, 5)$.

El volumen de la caja es $V(x) = l \cdot a \cdot h = (16 - 2x)(10 - 2x)x$. $V(x) = (160 - 32x - 20x + 4x^2)x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$.

Para maximizar el volumen, derivamos e igualamos a cero: $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0$.

Dividimos por 4 para simplificar: $3x^2 - 26x + 40 = 0$.

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4(3)(40)}}{2(3)} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 480}}{6} = \frac{26 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{26 \pm 14}{6}$$

Obtenemos dos soluciones: $x_1 = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \approx 6.67$ y $x_2 = \frac{12}{6} = 2$.

El valor $x_1 = 20/3$ está fuera del dominio $(0, 5)$, por lo que lo descartamos. El único candidato es $x = 2$.

Para confirmar que es un máximo, usamos la segunda derivada: $V''(x) = 24x - 104$. $V''(2) = 24(2) - 104 = 48 - 104 = -56 < 0$. Confirma que es un máximo.

Las dimensiones para el volumen máximo son (con $x = 2$):

- Largo: $16 - 2(2) = 12$ cm.
- Ancho: $10 - 2(2) = 6$ cm.
- Alto: 2 cm.

Largo = 12 cm, Ancho = 6 cm, Alto = 2 cm.

b) Dicho volumen.

Sustituimos $x = 2$ en la función de volumen: $V(2) = (16 - 4)(10 - 4)(2) = 12 \cdot 6 \cdot 2 = 144$.

El volumen máximo es de 144 cm³.

Problema 7. Probabilidad

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?
- Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?
- Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Solución:

Definimos los sucesos:

M_1, M_2, M_3 : La lata es fabricada por la máquina 1, 2 o 3.

D : La lata es defectuosa. \bar{D} : La lata no es defectuosa.

Datos del problema:

$$P(D) = 0.1025.$$

$$P(M_1) = 0.30, P(D|M_1) = 0.10.$$

$$P(M_2) = 0.25, P(D|M_2) = 0.05.$$

$$P(M_3) = 1 - (0.30 + 0.25) = 0.45.$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?

Buscamos $P(D|M_3)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) + P(D|M_3)P(M_3).$$

$$0.1025 = (0.10)(0.30) + (0.05)(0.25) + P(D|M_3)(0.45).$$

$$0.1025 = 0.03 + 0.0125 + 0.45 \cdot P(D|M_3).$$

$$0.1025 = 0.0425 + 0.45 \cdot P(D|M_3).$$

$$0.06 = 0.45 \cdot P(D|M_3) \implies P(D|M_3) = \frac{0.06}{0.45} = \frac{60}{450} = \frac{2}{15} \approx 0.1333.$$

$$\boxed{P(D|M_3) = 2/15 \approx 0.1333.}$$

- Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

Buscamos $P(M_1|\bar{D})$. Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(M_1|\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}|M_1)P(M_1)}{P(\bar{D})}.$$

Calculamos las probabilidades necesarias:

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.1025 = 0.8975.$$

$$P(\bar{D}|M_1) = 1 - P(D|M_1) = 1 - 0.10 = 0.90.$$

$$P(M_1|\bar{D}) = \frac{(0.90)(0.30)}{0.8975} = \frac{0.27}{0.8975} \approx 0.3008.$$

$$\boxed{P(M_1|\bar{D}) \approx 0.3008.}$$



- c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Buscamos $P(\bar{M}_2|D) = 1 - P(M_2|D)$.

Calculamos $P(M_2|D)$ con el Teorema de Bayes:

$$P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2)P(M_2)}{P(D)} = \frac{(0.05)(0.25)}{0.1025} = \frac{0.0125}{0.1025} \approx 0.1220$$

$$P(\bar{M}_2|D) = 1 - 0.1220 = 0.8780$$

$$\boxed{P(\bar{M}_2|D) \approx 0.8780.}$$

Problema 8. Probabilidad

Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.
- Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.
- Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Solución:

Sea X la variable aleatoria "número de mensajes con emoticono en 10 enviados". Sigue una distribución Binomial $X \sim B(n = 10, p = 0.6)$.

Como la tabla proporcionada es para $p \leq 0.5$, definimos la variable complementaria Y : "número de mensajes SIN emoticono".

La probabilidad de no tener emoticono es $q = 1 - p = 0.4$.

$Y \sim B(n = 10, p = 0.4)$.

- Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.

Esto es $P(X = 0)$, que equivale a $P(Y = 10)$.

$$P(Y = 10) = \binom{10}{10}(0.4)^{10}(0.6)^0 = 1 \cdot (0.4)^{10} \approx 0.0001048.$$

Como se piden 4 decimales, la probabilidad es 0.0001.

$$P(X = 0) \approx 0.0001.$$

- Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.

Dos quintas partes de 10 es $(2/5) \cdot 10 = 4$. Buscamos $P(X = 4)$.

Esto equivale a que $10 - 4 = 6$ mensajes no tengan emoticono, es decir, $P(Y = 6)$.

$$P(Y = 6) = \binom{10}{6}(0.4)^6(0.6)^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(0.004096)(0.1296) = 210 \cdot 0.00053084 \approx 0.1115.$$

$$P(X = 4) \approx 0.1115.$$

- Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Buscamos $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$.

Esto equivale a que haya 2, 1 o 0 mensajes SIN emoticono.

$$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2).$$

Este valor se puede leer directamente de la tabla de la distribución Binomial acumulada para $n = 10, p = 0.40$ y $k = 2$.

$$P(Y \leq 2) = F(2) = 0.1673.$$

$$P(X \geq 8) = 0.1673.$$